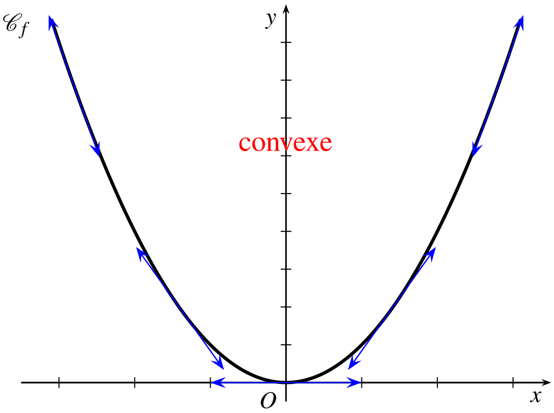
I CONVEXITÉ

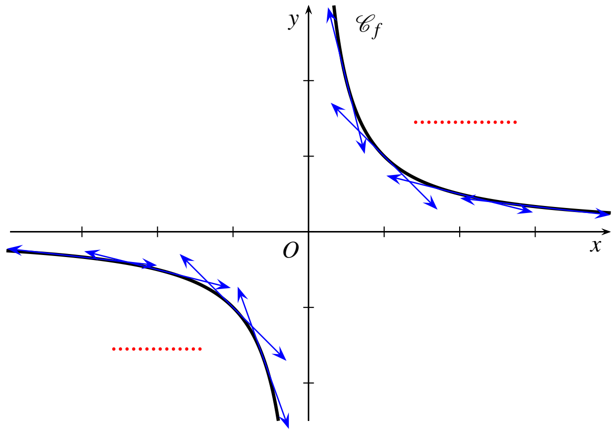
1 FONCTION CONVEXE, FONCTION CONCAVE

DÉFINITIONS

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
- Dire que la fonction f est CONVEXE sur I signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située entièrement AU DESSUS de chacune de ses tangentes.
- Dire que la fonction f est CONCAVE sur I signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située entièrement EN DESSOUS de chacune de ses tangentes.

EXEMPLES

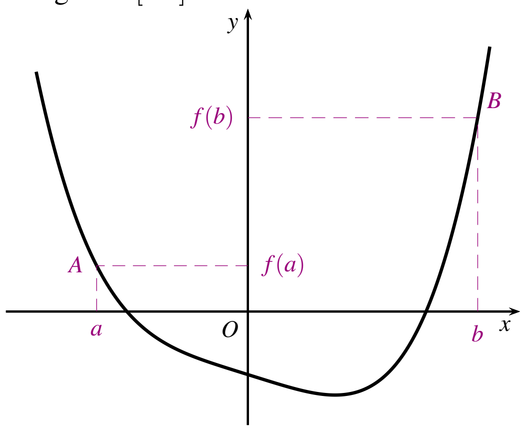




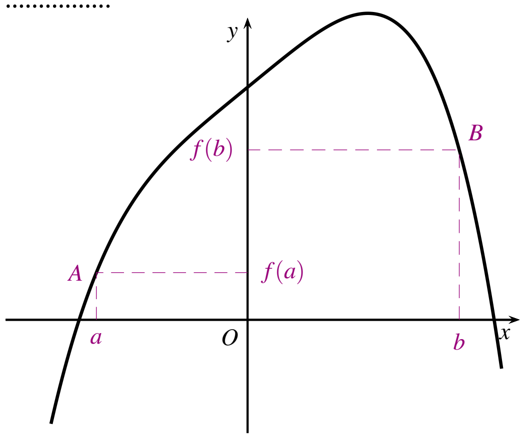
....

REMARQUE

Intuitivement, quels que soient les points A et B de la courbe $\mathscr{C}_f$
- Si le segment $[AB]$ est au-dessus de la courbe alors f est ....
- Si le segment $[AB]$ est au-dessous de la courbe alors f est ....



f est ....



f est ....

THÉORÈME (*admis*)

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
–

–

CONSÉQUENCE

On note f'' la dérivée seconde de la fonction f, c'est à dire la dérivée de la dérivée f'. – Si la dérivée seconde est positive alors la fonction f est convexe. – Si la dérivée seconde est négative alors la fonction f est concave.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$.
Étude de la convexité de f sur $\mathbb{R}$:

$$f''(x) =$$

Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f''.
$f''(x) = 0$ équivaut à soit $x = 2$. D'où le tableau :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
signe de $f''(x)$		0	
variations de f'			
convexité de f			

Conclusion : ....

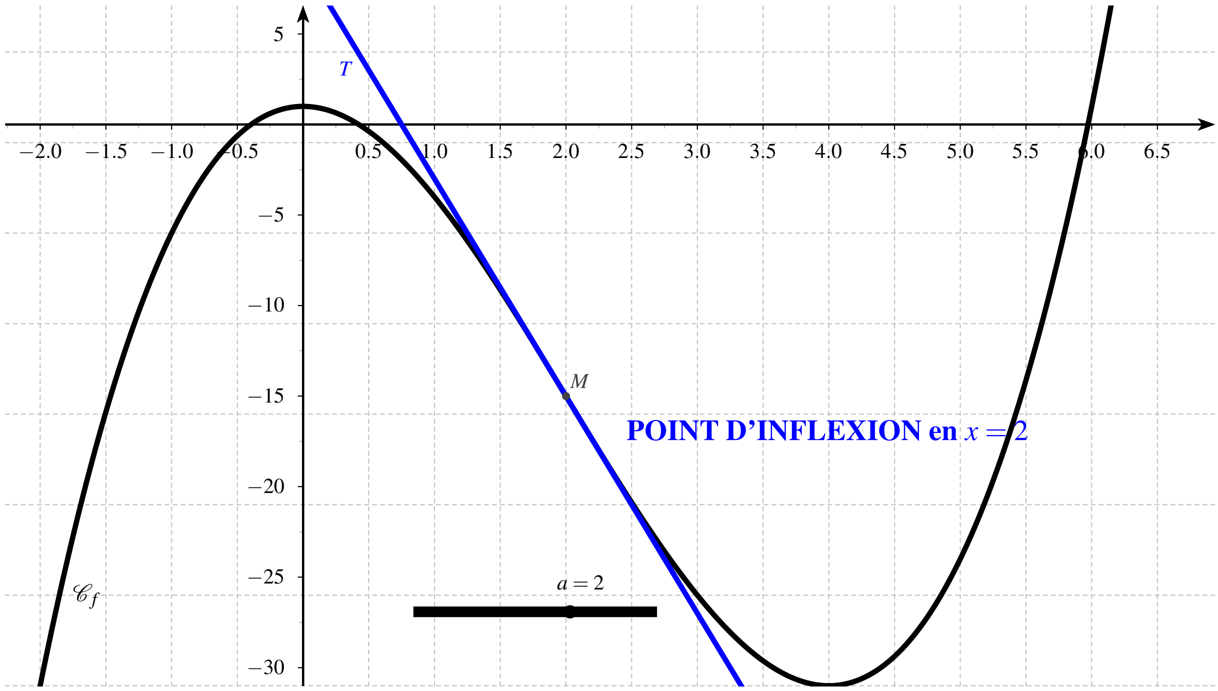
2 POINT D'INFLEXION

DÉFINITION

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Soit $a \in I$. On dit que le point A $(a\,;\,f(a))$ est un **point d'inflexion** de $\mathscr{C}_f$ si, en A, la courbe $\mathscr{C}_f$ **traverse** sa tangente.

EXEMPLE 1

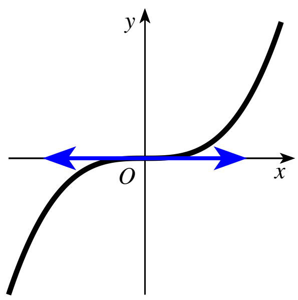
Reprenons l'exemple précédent avec : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
D'après l'étude de la convexité, on remarque qu'en $x = 2$ la fonction f change de convexité.
Étudions de plus près la position de la tangente T par rapport à $\mathscr{C}_f$ en ce point d'abscisse $x = 2$ sur GÉOGEBRA.



La tangente T d'équation : $y =$ .... **traverse** la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M d'abscisse $x = 2$
Le point M d'abscisse $x = 2$ et d'ordonnée : $y = f(2) = -15$ est donc **un point d'inflexion**

EXEMPLE 2

La courbe représentative de la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ admet comme point d'inflexion l'origine $O(0;0)$ du repère.



CONSÉQUENCES

- En un point d'inflexion la courbe traverse sa tangente : cela signifie que la fonction **change de convexité**. (la courbe $\mathscr{C}_f$ passe de concave à convexe ou de convexe à concave.)
- Si la **dérivée** f' **change de sens de variation en** a alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a.
- Si **la dérivée seconde** f'' **s'annule en changeant de signe en** a alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
Déterminer le(s) point(s) d'inflexion de f.

Sa dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) =$ ....

Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) =$............................ $=$ ....

L'équation $f''(x) = 0$ admet deux solutions $x_1 =$ et $x_2 =$
Comme pour $x \in \mathbb{R}$, $20x^2 \geqslant 0$ alors $f''(x)$ est du même signe que ....

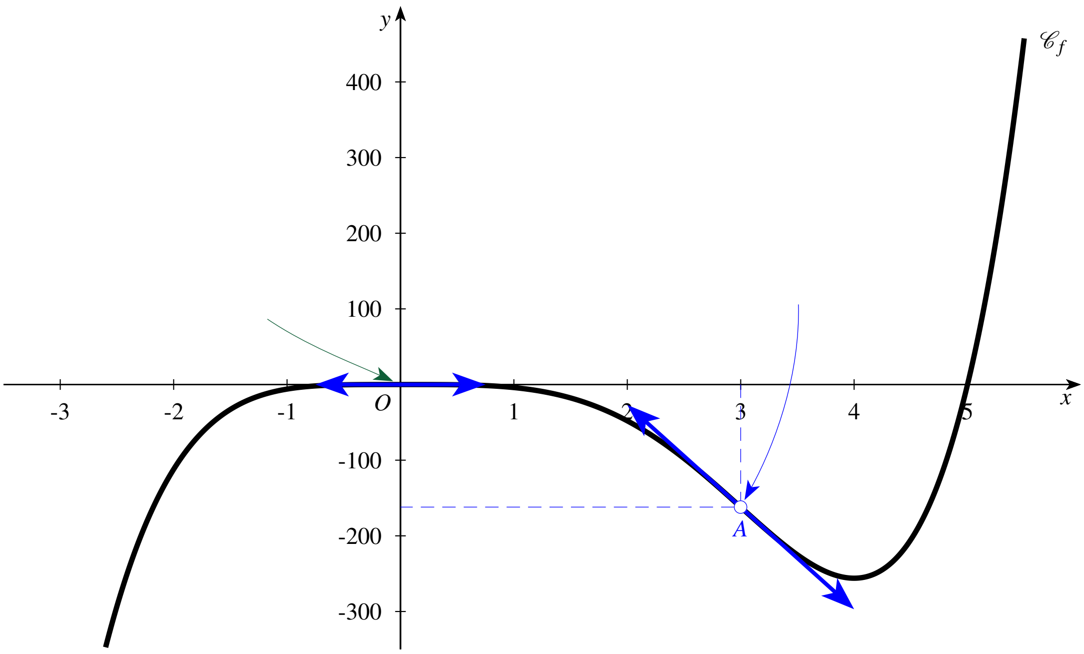
Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f''. D'où le tableau :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
signe de $f''(x)$			0		0		
variations de f'							

En tenant compte des changements de variation de la dérivée f' on en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet **un seul** point d'inflexion, le point A (;). (avec $f(3) =$)
En effet :

–

–



Exercices : n° 21 et 22 p 151 + n° 29 et 30 p 152 + n° 41 et 42 p 153.